

FUNDAMENTOS Y TEORÍAS FÍSICAS: PREFÍSICA MATEMÁTICA

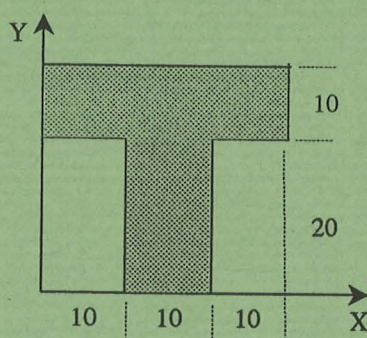
CENTROS DE GRAVEDAD Y

MOMENTOS DE INERCIA

SINOPSIS TEÓRICA Y EJERCICIOS RESUELTOS

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-12-05

1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

FUNDAMENTOS Y TEORÍAS FÍSICAS: PREFÍSICA MATEMÁTICA

CENTROS DE GRAVEDAD Y

MOMENTOS DE INERCIA

SINOPSIS TEÓRICA Y EJERCICIOS RESUELTOS

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-12-05

**CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA**

NUMERACIÓN

- 3 Área
- 12 Autor
- 05 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

- 0 VARIOS
- 1 ESTRUCTURAS
- 2 CONSTRUCCIÓN
- 3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
- 4 TEORÍA
- 5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
- 6 PROYECTOS
- 7 URBANISMO
- 8 RESTAURACIÓN

Centros de gravedad y momentos de inercia

© 2005 Mercedes González Redondo

Instituto Juan de Herrera.

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.

Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.

CUADERNO 74.03 / 3-12-05

ISBN: 84-9728-144-6

Depósito Legal: M-2600-2005

ÍNDICE

	Pág.
I. SINOPSIS TEÓRICA	
1. Consideraciones introductorias	5
2. Concepto general de momento de orden " n " respecto de " r "	5
3. Momentos de primer orden: centroides, centros de gravedad y centros de masas	6
4. Momentos de segundo orden: momentos de inercia	12
5. Productos de inercia	15
II. EJERCICIOS RESUELTOS	
1. Figuras geométricas	17
2. Cuerpos con masa uniformemente distribuida	25
3. Cuerpos con masa no uniformemente distribuida	33

I. SINOPSIS TEÓRICA

1. CONSIDERACIONES INTRODUCTORIAS

Esta monografía dedicada a centros de gravedad y momentos de inercia se inserta, en el contexto de la asignatura *Fundamentos y teorías físicas*, en el conjunto de temas de la primera parte "Fundamentos".

Y dentro de los *fundamentos* en el capítulo de "Prefísica"; es decir, el correspondiente al estudio de elementos de naturaleza no propiamente física (que no se refieren a ningún fenómeno físico) pero que son de capital importancia para el estudio de diferentes teorías físicas. Es prefísica porque es Matemáticas, en concreto geometría; y aunque se considera la masa (magnitud fundamental y primordial de la Física) no sucede nada en ella, no hay fenómeno, no hay proceso, no le acaece nada. Pero sí podrían ser física de la "cosa", del cuerpo, en la tarea de su caracterización. En todo caso el planteamiento es puramente formal, matemático. En resumen, se refiere puramente a la *geometría* (línea, área o volumen y, en su caso, contenido de ese volumen o masa) de la figura, sin hacer referencia a los fenómenos ni a los problemas físicos; se miden y calculan elementos propios del cuerpo.

En este amplio capítulo de Prefísica desempeñan un papel de relevante importancia los temas que en Física clásica reciben, de ordinario, los nombres de centros de gravedad y momentos de inercia y que, desde esta perspectiva prefísica, son sustantivamente de naturaleza exclusiva matemática.

Desde este punto de vista estrictamente matemático se consideran relacionados con los conceptos más generales de momentos de primer orden y momentos de segundo orden.

Los temas concretos de Centros de gravedad y Momentos de inercia son de suma importancia en Arquitectura e Ingeniería y se pretende enmarcarlos en la concepción más general y abstracta que considera la Matemática de Momentos de orden " r ".

2. CONCEPTO GENERAL DE MOMENTO DE ORDEN " n " RESPECTO DE " r "

En la geometría de masas hay un concepto fundamental, primario, general, y muy útil, que es el *momento de orden " n " de una figura geométrica o cuerpo físico, con respecto a un punto, eje o plano*, que se define, con carácter general, matemáticamente, de la forma siguiente:

$$M_{n,r} = \int_{\Omega} d^n d\Omega$$

donde:

$M_{n,r}$: es el momento de orden n respecto de r (punto, eje o plano).

$\int_{\Omega}$: es la integral de línea $\int_1^2$, de superficie $\iint_S$, de volumen $\iiint_V$, o de masa $\iiint_M$.

d : es la distancia del elemento $d\Omega$ a r .

n : es el orden del momento, número entero;

$d\Omega$: es el elemento diferencial de línea, de superficie, de volumen de cuerpo o bien (no se olvide que hablamos de problema matemático) de masa lineal, masa superficial o masa volumétrica.

Por lo que afecta a *figuras geométricas* los elementos diferenciales corresponden a un elemento diferencial de línea (dl), de superficie (dS), o de volumen (dV).

Por lo que respecta a *cuerpos físicos* los elementos diferenciales de masa (dm), pueden pertenecer a masas (supuestamente) lineales ($dm = \lambda dl$), superficiales ($dm = \sigma dS$) o volumétricas ($dm = \rho dV$). Y estas masas pueden estar distribuidas de manera *homogénea* o *heterogénea*; es decir, que las densidades lineales, superficiales o volumétricas pueden ser constantes (distribución uniforme) o variables (distribución no uniforme).

En general, el momento es una propiedad *respectiva*; es decir, no es intrínseca a la figura o al cuerpo sino de la figura o cuerpo *respecto* de un punto, eje o plano.

3. MOMENTOS DE PRIMER ORDEN: CENTROIDES, CENTROS DE GRAVEDAD Y CENTROS DE MASAS

Tres conceptos asociados diferentes que requieren tres términos asociados diferentes: *centroide* se refiere a las figuras, *centro de gravedad* se refiere a los cuerpos y *centro de masas* se refiere a conjuntos de cuerpos que se consideran puntos materiales (con masas en sus respectivos centros de gravedad), de ordinario se consideran sinónimos, pero como puede observarse existen diferencias claras en el terreno de lo conceptual aunque no tanto en el formal matemático.

Propiedad: Si existe un eje de simetría en la figura (o cuerpo), el centroide (o centro de gravedad) estará en él. Si existen varios ejes de simetría, estará en el punto donde éstos se corten (punto común a todos).

3.1. Momento de primer orden

a) De un segmento

Se considera un segmento cualquiera, L , colocado sobre el eje x de unos ejes de referencia x, y . Tomamos un diferencial de longitud, dl , a distancia x del eje y , perpendicular a la varilla.

De acuerdo con la definición general, el momento respecto al eje y viene dado por la expresión:

$$Q_y = \int_L x dl$$

b) De una superficie plana

Se considera un área cualquiera, S , unos ejes de referencia x , y . Tomamos un diferencial de área, dS , a distancias y y x , respectivamente, de los ejes.

De acuerdo con la definición general, el momento respecto al eje x viene dado por la expresión:

$$Q_x = \iint_S y dS$$

Y respecto al eje y por:

$$Q_y = \iint_S x dS$$

El momento respecto al origen sería:

$$Q_o = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

c) De un volumen

Se considera un volumen cualquiera, V , y unos ejes de referencia x , y , z . Tomamos un diferencial de volumen, dV , en el punto $P(x, y, z)$.

De acuerdo con la definición general, el momento respecto al eje x viene dado por la expresión:

$$Q_x = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} dV$$

Y respecto al eje y por:

$$Q_y = \iiint_V \sqrt{x^2 + z^2} dV$$

Y respecto al eje z por:

$$Q_z = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dV$$

Y respecto al origen:

$$Q_o = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

3.2. Centroide

Se denomina *centroide* al punto de una figura geométrica (sin masa) que tiene la propiedad de que si en él estuviera concentrado toda la figura (línea, superficie o volumen) tendría los mismos momentos.

Las coordenadas del centroide, de acuerdo con la definición, se obtienen a partir de las expresiones del momento de primer orden vistas anteriormente.

a) Centroide de un *segmento*

$$Q_y = \int_L x \, dl = x_c L \Rightarrow x_c = \frac{\int_L x \, dl}{L}$$

b) Centroide de una *superficie plana*

b.1) Simple

$$Q_y = \iint_S x \, dS = x_c S \Rightarrow x_c = \frac{\iint_S x \, dS}{S}$$

$$Q_x = \iint_S y \, dS = y_c S \Rightarrow y_c = \frac{\iint_S y \, dS}{S}$$

b.2) Compuesta

Para un número finito de superficies en el mismo plano, por aplicación del “*principio de superposición de efectos*” (ley de suma de grupo abeliano del espacio vectorial real lineal de las magnitudes físicas clásicas), el momento de primer orden respecto al eje x se expresa:

$$Q_x = \int_S y \, dS = \int_{S_1} y \, dS_1 + \int_{S_2} y \, dS_2 + \dots + \int_{S_n} y \, dS_n = y_{c_1} S_1 + y_{c_2} S_2 + \dots + y_{c_n} S_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n y_{c_i} S_i = y_c S \Rightarrow y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} S_i}{S}$$

Análogamente, para el eje y :

$$Q_y = \sum_{i=1}^n x_{c_i} S_i = x_c S \Rightarrow x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_{c_i} S_i}{S}$$

c) Centroide de un volumen

$$Q_x = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} dV = x_c V \Rightarrow x_c = \frac{\iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} dV}{V}$$

$$Q_y = \iiint_V \sqrt{x^2 + z^2} dV = y_c V \Rightarrow y_c = \frac{\iiint_V \sqrt{x^2 + z^2} dV}{V}$$

$$Q_z = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dV = z_c V \Rightarrow z_c = \frac{\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dV}{V}$$

3.3. Centros de gravedad de un cuerpo

Las componentes del centro de gravedad de un cuerpo (volumen geométrico con masa) se obtienen a partir de las expresiones:

$$x_{cg} = \frac{\int x dM}{M}$$

$$y_{cg} = \frac{\int y dM}{M}$$

$$z_{cg} = \frac{\int z dM}{M}$$

a) Centro de gravedad de una varilla

Si el elemento diferencial de masa considerado es lineal (ej: varilla), $dM = \lambda d\ell$, siendo λ la *densidad lineal* de masa, la coordenada de su centro de gravedad viene dada por la expresión:

$$x_{cg} = \frac{\int x dM}{M} = \frac{\int x \lambda d\ell}{M}$$

b) Centro de gravedad de una placa

Si el elemento diferencial de masa considerado es superficial (ej: círculo¹), $dM = \sigma dS$, siendo σ la *densidad superficial* de masa, las coordenadas de su centro de gravedad vienen dadas por las expresiones:

$$x_{cg} = \frac{\int x dM}{M} = \frac{\iint_S x \sigma dS}{M}$$

$$y_{cg} = \frac{\int y dM}{M} = \frac{\iint_S y \sigma dS}{M}$$

d) Centro de gravedad de un cuerpo

Si el elemento diferencial de masa considerado es volumétrico (ej: esfera²), $dM = \rho dV$, siendo ρ la *densidad volumétrica* de masa, las coordenadas de su centro de gravedad vienen dadas por las expresiones:

$$x_{cg} = \frac{\int x dM}{M} = \frac{\iiint_V x \rho dV}{M}$$

$$y_{cg} = \frac{\int y dM}{M} = \frac{\iiint_V y \rho dV}{M}$$

$$z_{cg} = \frac{\int z dM}{M} = \frac{\iiint_V z \rho dV}{M}$$

¹ Convendría, en este caso, utilizar coordenadas polares.

² Convendría, en este caso, utilizar coordenadas polares.

e) Centro de gravedad de cuerpos compuestos

Cada parte en la que se pueda dividir el cuerpo tendrá su correspondiente centro de gravedad parcial. De forma análoga a lo visto anteriormente para figuras compuestas, las componentes del centro de gravedad serán:

$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{cgi} M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} = \frac{x_{cg1} M_1 + x_{cg2} M_2 + \dots + x_{cgn} M_n}{M_1 + M_2 + \dots + M_n}$$

$$y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{cgi} M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} = \frac{y_{cg1} M_1 + y_{cg2} M_2 + \dots + y_{cgn} M_n}{M_1 + M_2 + \dots + M_n}$$

$$z_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{cgi} M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} = \frac{z_{cg1} M_1 + z_{cg2} M_2 + \dots + z_{cgn} M_n}{M_1 + M_2 + \dots + M_n}$$

considerando:

$$x_{cg1} = \frac{\int x_1 dM_1}{M_1} ; \quad x_{cg2} = \frac{\int x_2 dM_2}{M_2} ; \quad \dots ; \quad x_{cgn} = \frac{\int x_n dM_n}{M_n}$$

$$y_{cg1} = \frac{\int y_1 dM_1}{M_1} ; \quad y_{cg2} = \frac{\int y_2 dM_2}{M_2} ; \quad \dots ; \quad y_{cgn} = \frac{\int y_n dM_n}{M_n}$$

$$z_{cg1} = \frac{\int z_1 dM_1}{M_1} ; \quad z_{cg2} = \frac{\int z_2 dM_2}{M_2} ; \quad \dots ; \quad z_{cgn} = \frac{\int z_n dM_n}{M_n}$$

4. MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN: MOMENTOS DE INERCIA

4.1. Momentos de segundo orden de figuras (momentos de inercia)

a) De un segmento

Sea L la longitud de un segmento cualquiera alineado según el eje x de referencia. Considerando un dl , se define el momento de segundo orden respecto al eje y de la forma:

$$I_y = \int_L x^2 dl$$

b) De una superficie

Sea S una superficie cualquiera con unos determinados ejes de referencia x e y . Considerando un dS , se define el momento de segundo orden respecto al eje x , según la definición general, de la forma:

$$I_x = \iint_S y^2 dS$$

Y respecto al eje y :

$$I_y = \iint_S x^2 dS$$

Y, finalmente, respecto al origen de coordenadas:

$$I_o = I_x + I_y = \iint_S (x^2 + y^2) dS$$

c) De un volumen

Sea V un volumen cualquiera con unos determinados ejes de referencia. Considerando un dV , se definen los momentos de segundo orden respecto a los ejes x , y , z y respecto al origen, según la definición, de la forma:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) dV$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) dV$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dV$$

$$I_o = \iiint_V r^2 dV = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

Por ser los integrandos de orden dos (cuadrados) todos los valores son positivos.

4.2. Momentos de inercia

Los momentos de inercia son momentos de segundo orden de cuerpos (es decir, con masa).

a) De una varilla

El momento de inercia de una varilla de longitud L y masa M , respecto a un eje perpendicular a ella situado en un extremo de la misma, se define:

$$I = \int_M x^2 dM = \int_0^L x^2 \lambda dx$$

donde x es la distancia del elemento diferencial al eje considerado.

b) De una placa

El momento de inercia de una placa de masa M , respecto a unos ejes cartesianos x e y , se define:

$$I_x = \iint_M y^2 dM = \iint_S y^2 \sigma dS$$

$$I_y = \iint_M x^2 dM = \iint_S x^2 \sigma dS$$

siendo y la distancia del elemento dS al eje x , y siendo x la distancia del elemento dS al eje y .

Y respecto al origen de coordenadas (momento de inercia polar):

$$I_o = \iint_M r^2 dM = \iint_M (x^2 + y^2) dM = I_x + I_y$$

c) De un cuerpo

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes cartesianos x , y , z y respecto del origen de coordenadas se definen de la forma:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dV$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho \, dV$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho \, dV$$

$$I_0 = \iiint_V r^2 \rho \, dV = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho \, dV = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

El momento de inercia es una magnitud (escalar o tensorial), cuyas dimensiones (de cada componente) son ML^2 , y su unidad en el SI es el kg.m^2 .

4.3. Cálculo del momento de inercia respecto a ejes paralelos. Teorema de Steiner

Una vez conocida la posición del centro de gravedad y los momentos de inercia respecto a los ejes x e y que pasan por él, se trata de encontrar una nueva expresión para el momento de inercia respecto a otros ejes, paralelos a los anteriores, situados a cualquier distancia. Para ello se utiliza la expresión:

$$I_x = I_{x_{cg}} + M d_x^2$$

que se denomina Teorema de Steiner y se enuncia de la siguiente manera: “*El momento de inercia respecto de un eje cualquiera es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo a éste que pase por el centro de gravedad más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia que separa dichos ejes paralelos*”.

De forma análoga sería respecto al eje y :

$$I_y = I_{y_{cg}} + M d_y^2$$

4.4. Radio de giro de una superficie

Se considera una superficie plana S cuyo momento de inercia respecto al eje x es I_x . Suponemos que esa superficie se concentra en una banda delgada paralela al eje x . Si la superficie S , así concentrada, ha de tener el mismo momento de inercia respecto al eje x , la banda debería colocarse a una distancia k_x de eje x definida por la relación

$$I_x = k_x^2 S$$

Despejando k_x :

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$$

La distancia k_x se denomina **radio de giro** de la superficie S respecto al eje x . Pueden definirse de forma análoga los radios de giro k_y y k_o

$$I_y = k_y^2 S \Rightarrow k_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}$$

$$I_o = k_o^2 S \Rightarrow k_o = \sqrt{\frac{I_o}{S}}$$

Se puede comprobar que se verifica la relación

$$k_o^2 = k_x^2 + k_y^2$$

5. PRODUCTOS DE INERCIA

Se introducen, de manera análoga, los denominados *productos de inercia* que se definen formalmente mediante las expresiones:

$$I_{xy} = \iint_S xy \, dS$$

$$I_{xz} = \iint_S xz \, dS$$

$$I_{yz} = \iint_S y z \, dS$$

Con los momentos de inercia y los productos de inercia y los productos de inercia respecto de unos ejes determinados se construye el *Tensor de inercia*, tensor de 2º orden simétrico que se define mediante la matriz:

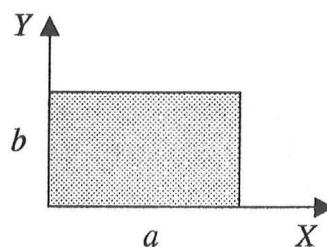
$$\mathfrak{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Por ser simétrico es diagonalizable y el sistema de referencia (con el mismo origen) en el cual es diagonal se denomina *principal* y los valores de la diagonal principal son los momentos de inercia principales (autovalores o valores característicos).

1. FIGURAS GEOMÉTRICAS

1.1. Se considera el rectángulo de la figura. Calcular:

- El centroide.
- El momento de inercia respecto del eje X.
- El momento de inercia respecto del eje Y.
- El momento de inercia respecto del origen.



a) Por simetría se sabe que el centro de gravedad estará en el centro geométrico de la figura, es decir, en $(a/2, b/2)$. De todas formas se va a calcular por integración con el fin de coger práctica para ejercicios posteriores.

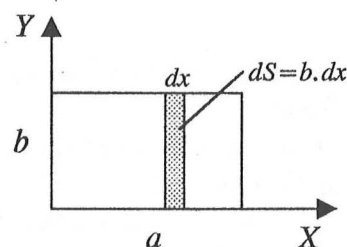
Para determinar la coordenada $\bar{x}$ del centroide por integración se considera un elemento diferencial de superficie vertical como muestra la figura:

$$dS = b \, dx$$

$$x_c = \frac{\int x \, dS}{S}$$

$$x_c \cdot S = \int_S x \, dS = \int_0^a x \, b \, dx = b \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{2}$$

$$x_c = \frac{a^2 b / 2}{a b} \Rightarrow \underline{\underline{x_c = \frac{a}{2}}}$$



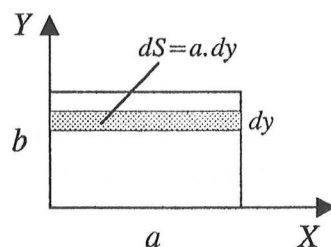
Para determinar la coordenada $\bar{y}$ del centroide por integración se considera un elemento diferencial de superficie horizontal como el de la figura:

$$dS = a \, dy$$

$$y_c = \frac{\int y \, dS}{S}$$

$$y_c \cdot S = \int_S y \, dS = \int_0^b y \, a \, dy = a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^b = \frac{a b^2}{2}$$

$$\underline{\underline{y_c = \frac{b}{2}}}$$



b) Para calcular el momento de inercia respecto del eje X se considera el elemento diferencial de superficie horizontal anterior por tener todos sus puntos equidistantes del eje X.

$$dS = a \, dy$$

$$I_x = \int_S y^2 \, dS = \int_0^b y^2 \, a \, dy = a \frac{b^3}{3}$$

c) Análogamente, para calcular el momento de inercia respecto del eje Y se considera el elemento diferencial de superficie vertical:

$$dS = b \, dx$$

$$I_y = \int_S x^2 \, dS = \int_0^a x^2 \, b \, dx = b \frac{a^3}{3}$$

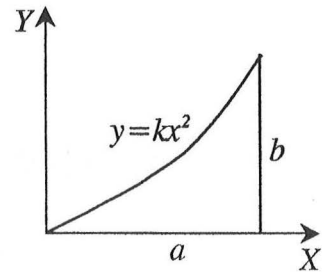
d) El momento de inercia respecto del origen será:

$$I_0 = I_x + I_y = a \frac{b^3}{3} + b \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} a b (b^2 + a^2)$$

1.2. Se considera el área parabólica representada en la figura.

Hallar:

- El centroide de la figura.
- El momento de inercia respecto al eje X .
- El momento de inercia respecto al eje Y .
- El radio de giro respecto a cada uno de los ejes.



Inicialmente se calcula el valor de k para determinar la función. Considerando el punto $x = a$, $y = b$:

$$b = k a^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

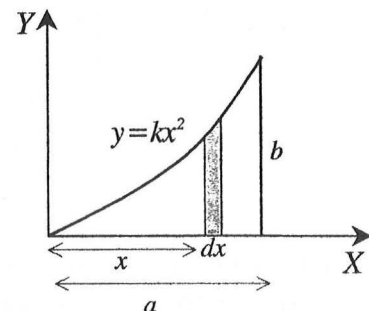
Por tanto, la curva es:

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 ; \quad x = a \sqrt{\frac{y}{b}}$$

a) Para determinar la componente x del centroide se considera un elemento diferencial de superficie vertical (todos los puntos del diferencial han de estar a la misma distancia del eje y , en este caso), como muestra la figura:

$$dS = y \, dx$$

$$S = \int_S dS = \int_0^a y \, dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 \, dx = \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{3} a b$$



Una vez conocida el área de la figura se procede a calcular la componente x del centroide:

$$x_c = \frac{\int x dS}{S}$$

siendo x la distancia desde el elemento diferencial de superficie ($dS = y dx$) al eje considerado.

$$x_c \cdot S = \int_S x dS = \int_0^a x y dx = \int_0^a x \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{1}{4} a^2 b$$

Por tanto:

$$x_c = \frac{1/4 a^2 b}{1/3 ab} \Rightarrow \underline{x_c = \frac{3}{4} a}$$

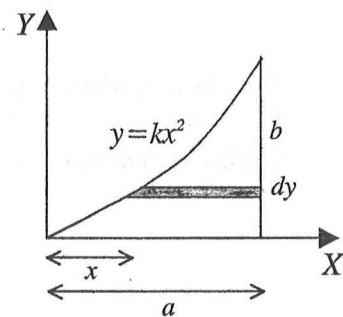
Análogamente, para determinar la componente y del centroide se considera un elemento diferencial de superficie horizontal [$dS = (a-x) dy$], como muestra la figura:

$$y_c = \frac{\int y dS}{S}$$

$$y_c S = \int_S y dS = \int_0^b y (a-x) dy = \int_0^b y \left(a - a \sqrt{\frac{y}{b}} \right) dy = \frac{ab^2}{10}$$

Por tanto:

$$y_c = \frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{1}{3} ab} \Rightarrow \underline{y_c = \frac{3}{10} b}$$



b) Para el cálculo de este momento de segundo orden (de inercia) I_x se considera, de nuevo, el elemento diferencial de superficie horizontal, por tener todos sus puntos equidistantes al eje X :

$$dS = (a-x) dy \Rightarrow I_x = \int y^2 dS = \int_0^b y^2 (a-x) dy = \int_0^b a y^2 dy - \int_0^b y^2 a \sqrt{\frac{y}{b}} dy$$

$$I_x = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b - \frac{a}{\sqrt{b}} \int_0^b y^{5/2} dy = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b - \frac{a}{\sqrt{b}} \left[\frac{y^{7/2}}{7/2} \right]_0^b$$

$$I_x = \frac{ab^3}{3} - \frac{2ab^3}{7} \Rightarrow \underline{I_x = \frac{ab^3}{21}}$$

c) Para el cálculo del momento de segundo orden I_y se considera el elemento diferencial de

superficie vertical: $dS = y \, dx$.

$$I_y = \int_S x^2 dS = \int_0^a x^2 y \, dx = \int_0^a x^2 \frac{b}{a^2} x^2 \, dx$$

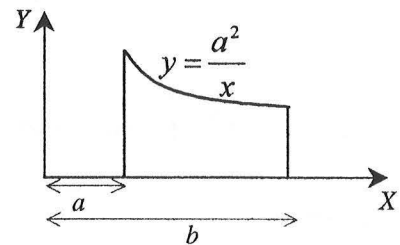
$$I_y = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^4 \, dx = \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^a \Rightarrow \underline{I_y = \frac{a^3 b}{5}}$$

d) Radios de giro.

$$K_x^2 = \frac{I_x}{S} = \frac{\frac{2I}{3}}{\frac{ab}{3}} = \frac{b^2}{7} \Rightarrow \underline{K_x = \frac{b}{\sqrt{7}}}$$

$$K_y^2 = \frac{I_y}{S} = \frac{\frac{5}{3} \frac{a^3 b}{ab}}{\frac{ab}{3}} = \frac{3}{5} a^2 \Rightarrow \underline{K_y = \sqrt{\frac{3}{5}} a}$$

1.3. Se considera el área de la figura, siendo $b = 3a$. Hallar el centroide de la figura.

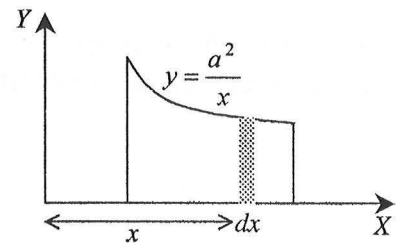


Inicialmente se calcula el área encerrada en la figura. Para ello se considera un elemento diferencial de superficie vertical, dS , como se muestra en la figura adjunta:

$$dS = y \, dx = \frac{a^2}{x} \, dx$$

Integrando esta expresión:

$$S = \int dS = \int_a^{3a} \frac{a^2}{x} \, dx = a^2 \ln \frac{3a}{a} = a^2 \ln 3$$



La componente x del centroide será:

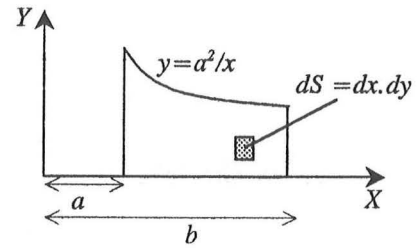
$$x_c = \frac{\int x \, dS}{S} \Rightarrow x_c \cdot S = \int_S x \, dS = \int_a^{3a} x \frac{a^2}{x} \, dx = \left[a^2 x \right]_a^{3a} = a^2 (3a - a) = 2a^3$$

Por tanto:

$$x_c = \frac{2a^3}{a^2 \ln 3} = \frac{2a}{\ln 3} \Rightarrow \underline{x_c = 1,82 a}$$

Para determinar la componente y del centroide se considera un diferencial de superficie, tal y como muestra la figura ($dS = dx \cdot dy$):

$$y_c = \frac{\int y \cdot dS}{S}$$



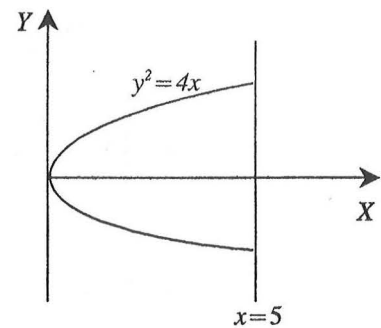
$$y_c \cdot S = \int_S y \cdot dS = \int_a^{3a} dx \int_0^{\frac{a^2}{x}} y \cdot dy = \int_a^{3a} \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{x} \right)^2 dx = -\frac{a^4}{2} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{3a} = \frac{a^4}{2} \left(-\frac{1}{3a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{a^3}{3}$$

Por tanto:

$$y_c = \frac{a^3 - \frac{a^4}{3a}}{2a^2 \ln 3} = \frac{a - \frac{a}{3}}{2 \ln 3} = \frac{a}{3 \ln 3} \Rightarrow \underline{y_c = 0,303 a}$$

1.4. Se considera la superficie limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 5$. Calcular:

- El centroide.
- El momento de segundo orden respecto al eje Y .
- El momento de segundo orden respecto al eje X .
- El momento de segundo orden respecto al origen de coordenadas.



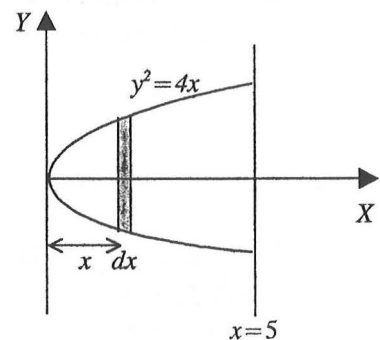
a) Inicialmente se calcula la superficie objeto de estudio, considerando el elemento diferencial vertical de superficie que se muestra en la figura siguiente:

$$y^2 = 4x \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$$

$$dS = (2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) dx$$

Integrando:

$$S = \int dS = \int_0^5 4\sqrt{x} dx = 4 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^5 = \frac{8}{3} 5^{3/2}$$



Una vez conocida la superficie se calcula la componente x del centroide:

$$x_c = \frac{\int x dS}{S} \Rightarrow x_c \cdot S = \int x \cdot dS = \int_0^5 x \cdot 4\sqrt{x} dx = 4 \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^5 = \frac{8}{5} 5^{5/2}$$

Por tanto:

$$x_c = \frac{\frac{8}{3} 5^{3/2}}{\frac{8}{5} 5^{5/2}} = \frac{3}{5} 5 \Rightarrow \underline{\underline{x_c = 3}}$$

Y, por simetría:

$$\underline{\underline{y_c = 0}}$$

b) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje Y, se considera el elemento diferencial del apartado anterior:

$$I_y = \int_S x^2 \cdot dS = \int_0^5 x^2 \cdot 4\sqrt{x} dx = 4 \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} \right]_0^5 \Rightarrow \underline{\underline{I_y = \frac{8}{7} 5^{7/2} = 319,438}}$$

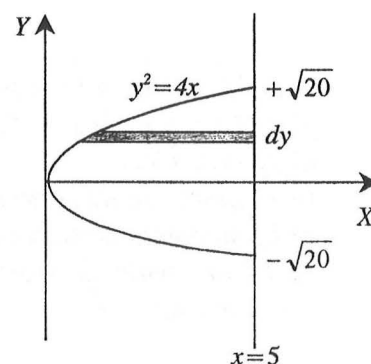
c) Para la obtención del momento de segundo orden respecto al eje X se considera un elemento diferencial de superficie horizontal como se observa en la figura:

$$dS = \left(5 - \frac{1}{4} y^2 \right) dy$$

$$I_x = \int_S y^2 dS = \int_{-\sqrt{20}}^{\sqrt{20}} y^2 \left(5 - \frac{1}{4} y^2 \right) dy$$

$$I_x = \left[\frac{5y^3}{3} - \frac{1}{4} \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{20}}^{\sqrt{20}} = \frac{10}{3} 20\sqrt{20} - \frac{1}{10} 20^{5/2}$$

$$\underline{\underline{I_x = 119,257}}$$

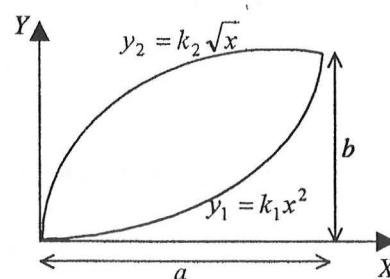


d) El momento de segundo orden respecto al origen de coordenadas, también conocido con el nombre de momento polar será:

$$\underline{\underline{I_0 = I_x + I_y = 319,438 + 119,257 = 438,695}}$$

1.5. Se considera la superficie encerrada entre las dos curvas de la figura. Hallar:

- El centroide de la figura.
- El momento de segundo orden respecto al eje Y.
- El momento de segundo orden respecto al eje X.



Se calculan los valores de k_1 y k_2 para poder determinar la superficie objeto de estudio:

$$b = k_2 \sqrt{a} \Rightarrow k_2 = \frac{b}{\sqrt{a}} \Rightarrow y_2 = \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{x}$$

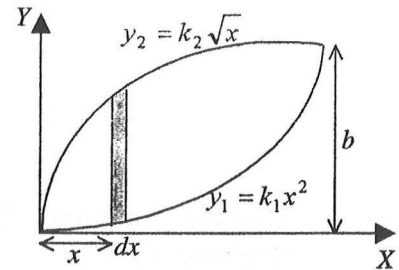
$$b = k_1 a^2 \Rightarrow k_1 = \frac{b}{a^2} \Rightarrow y_1 = \frac{b}{a^2} x^2$$

Para determinar la superficie encerrada entre las dos curvas se considera el elemento diferencial de superficie vertical de la figura:

$$dS = (y_2 - y_1) dx = \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{x} - \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx$$

Integrando esta expresión, se obtiene la superficie:

$$S = \int dS = \int_0^a \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{x} - \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{a^{3/2}}{3/2} - \frac{b}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{ab}{3}$$



La componente x del centroide se obtiene a partir de la expresión:

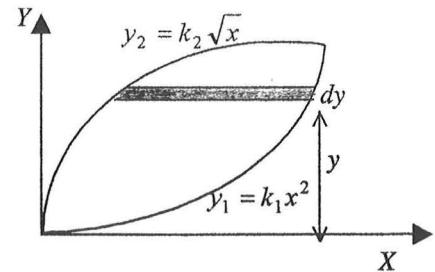
$$x_c \cdot S = \int_S x dS = \int_0^a x \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{x} - \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{a^{5/2}}{5/2} - \frac{b}{a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{3}{20} a^2 b$$

Por tanto:

$$x_c = \frac{\frac{3}{20} a^2 b}{\frac{ab}{3}} = \frac{9}{20} a \Rightarrow \underline{x_c = \frac{9}{20} a}$$

Para la determinación de la componente y_c se toma un diferencial de superficie horizontal, como muestra la figura adjunta, definido de la forma siguiente:

$$dS = (x_1 - x_2) dy = \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \sqrt{y} - \frac{a}{b^2} y^2 \right) dy$$



La componente y del centroide se obtiene a partir de la expresión:

$$y_c \cdot S = \int_A y dS = \int_0^b y \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \sqrt{y} - \frac{a}{b^2} y^2 \right) dy = \frac{a}{\sqrt{b}} \frac{b^{5/2}}{5/2} - \frac{a}{b^2} \frac{b^4}{4} = \frac{3}{20} a b^2$$

Por tanto:

$$y_c = \frac{\frac{3}{20} a b^2}{\frac{ab}{3}} = \frac{9}{20} b \Rightarrow \underline{y_c = \frac{9}{20} b}$$

b) Para el cálculo del momento de segundo orden respecto al eje Y se considera el elemento diferencial de superficie vertical $dS = (y_2 - y_1) dx$ por tener todos sus puntos a la misma distancia del eje Y .

$$I_y = \int_S x^2 dS = \int_0^a x^2 \left[k_2 x^{1/2} - k_1 x^2 \right] dx$$

$$I_y = \left[\frac{k_2 x^{7/2}}{7/2} - \frac{k_1 x^5}{5} \right]_0^a = \frac{k_2 a^{7/2}}{7/2} - \frac{k_1 a^5}{5} \Rightarrow \underline{I_y = \frac{3a^3 b}{35}}$$

c) Para la obtención del momento de segundo orden respecto al eje X se considera el elemento diferencial de superficie horizontal $dS = (x_1 - x_2) dy$. Además, se definen las curvas en función de y , en vez de x como en el apartado anterior.

$$y_1 = \frac{b}{a^2} x^2 \Rightarrow x_1 = a \sqrt{\frac{y}{b}}$$

$$y_2 = \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{x} \Rightarrow y_2^2 = \frac{b^2}{a} x \Rightarrow x_2 = \frac{a}{b^2} y^2$$

El momento de segundo orden será:

$$I_x = \int_S y^2 dS = \int_0^b y^2 \left[a \sqrt{\frac{y}{b}} - \frac{a}{b^2} y^2 \right] dy \Rightarrow I_x = \frac{a}{\sqrt{b}} \left[\frac{y^{7/2}}{7/2} \right]_0^b - \left[\frac{a}{b^2} \frac{y^5}{5} \right]_0^b$$

$$\underline{I_x = \frac{3ab^3}{35}}$$

2. CUERPOS CON MASA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA (CUERPOS HOMOGÉNEOS)

2.1. Se considera una varilla homogénea de longitud L y masa M . Calcular:

a) El centro de gravedad.

b) El momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la varilla que pase por un extremo de la varilla.

c) El momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior que pase por su centro de gravedad.

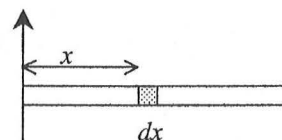
a) Por simetría, dado que la masa está uniformemente distribuida, el centro de gravedad estará en el centro de la varilla:

$$x_{cg} = \frac{L}{2}$$

b) Se considera un elemento dM que está a una distancia x del extremo de la varilla por el que pasa el eje:

$$dM = \lambda \, dx$$

$$M = \lambda \, L \Rightarrow \lambda = \frac{M}{L}$$



El momento de inercia respecto a ese eje será:

$$I_{extremo} = \int_M x^2 \, dM = \int_0^L x^2 \, \lambda \, dx = \lambda \, \frac{L^3}{3}$$

$$\underline{I_{extremo} = \frac{1}{3} M L^2}$$

c) Para calcular el momento de inercia respecto al eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro de gravedad utilizamos el teorema de Steiner, sabiendo que el centro de gravedad de la varilla está en su centro geométrico ya que es homogénea.

$$I_{extremo} = I_{cg} + M d^2$$

$$\frac{1}{3} M L^2 = I_{cg} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$I_{cg} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) M L^2 \Rightarrow \underline{I_{cg} = \frac{1}{12} M L^2}$$

2.2. Se considera un disco de radio R y masa M uniformemente distribuida. Calcular:

- El centro de gravedad.
- El momento de inercia del disco respecto al eje perpendicular al plano del disco que pasa por su centro de gravedad.
- El momento de inercia del disco respecto al eje paralelo al plano del disco que pasa por su centro de gravedad.
- El momento de inercia del disco respecto a su centro de gravedad.
- El momento de inercia del disco respecto a cada uno de los ejes cartesianos.

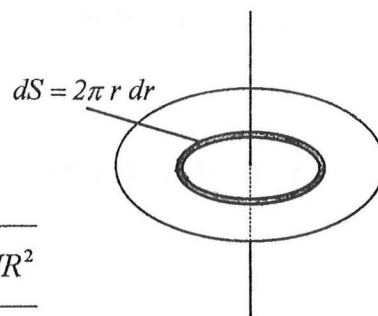
a) Por simetría el centro de gravedad estará en el centro del disco, ya que la masa está uniformemente distribuida ($M = \sigma \cdot S = \sigma \pi R^2$).

b) Para determinar el momento de inercia respecto del eje perpendicular al plano del disco que pasa por su centro de gravedad consideraremos un elemento diferencial de superficie que sea un anillo de espesor dr , ya que todos sus puntos están a la misma distancia del eje y, que se expresa de la forma:

$$dS = 2\pi r dr \Rightarrow dM = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Y el momento de inercia será:

$$I = \int_M r^2 dM = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4} \Rightarrow \underline{I = \frac{1}{2} MR^2}$$



c) Para determinar el momento de inercia respecto del eje paralelo al plano del disco que pasa por su centro de gravedad consideraremos un elemento diferencial de superficie definido de la forma:

$$dS = r dr d\varphi$$

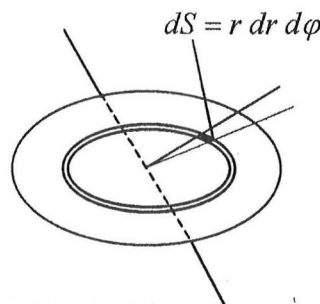
debido a que cada parte del disco está a una distancia distinta del eje. Por tanto:

$$dM = \sigma dS = \sigma r dr d\varphi$$

y el momento de inercia será:

$$I = \int_M r^2 dM = \int_0^{2\pi} \int_0^R x^2 \sigma r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos^2 \varphi \sigma r dr d\varphi = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$\underline{I = \frac{1}{4} MR^2}$$



d) El momento de inercia del disco respecto de su centro de gravedad (momento de inercia polar) será el mismo que el del apartado b), ya que la mínima distancia es precisamente el radio. Vamos a comprobarlo:

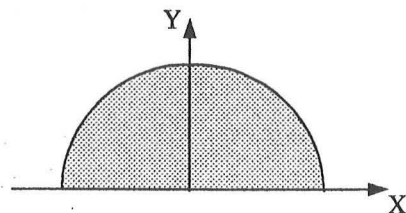
$$I_0 = \int_M r^2 dM = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sigma r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \sigma \frac{R^4}{4} d\varphi = \sigma \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4 \pi}{2}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} M R^2$$

e) $I_0 = I_x + I_y$. Por simetría central: $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{4} M R^2$

2.3. Se considera el semicírculo de radio R y masa M uniformemente distribuida de la figura. Calcular:

- El centro de gravedad.
- El momento de inercia respecto al eje X .
- El momento de inercia respecto al eje Y .
- El momento de inercia polar.



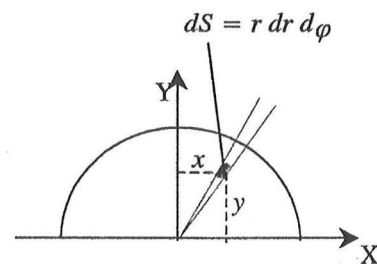
La componente x del centro de gravedad es cero por la simetría de la figura.

$$x_{cg} = 0$$

La masa total distribuida uniformemente por el semicírculo es:

$$M = \int_S \sigma \cdot dS = \int_0^\pi \int_0^R \sigma \cdot r \cdot dr d\varphi = \sigma \frac{R^2}{2} [\varphi]_0^\pi = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}$$



Para calcular la componente y del centro de gravedad se utiliza la expresión:

$$y_{cg} = \frac{\int y \cdot dM}{M}$$

$$y_{cg} \cdot M = \int_M y \cdot dM = \sigma \int_0^\pi \int_0^R r \sin\varphi r dr d\varphi = \sigma \int_0^\pi \frac{R^3}{3} \sin\varphi d\varphi = -\sigma \frac{R^3}{3} [\cos\varphi]_0^\pi = \sigma \frac{2R^3}{3}$$

$$y_{cg} = \frac{\sigma \frac{2R^3}{3}}{\sigma \frac{\pi R^2}{2}} \Rightarrow \overline{y_{cg} = \frac{4R}{3\pi}}$$

b) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje X se considera el elemento diferencial de masa definido anteriormente:

$$I_x = \int_M y^2 dM = \int_0^\pi \sigma \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^2 r dr = \sigma \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \frac{R^4}{4} = \sigma \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi$$

$$I_x = \sigma \frac{R^4}{4} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^\pi = \sigma \pi \frac{R^4}{8} = \frac{2M}{\pi R^2} \frac{\pi R^4}{8}$$

$$\overline{I_x = \frac{1}{4} M R^2}$$

c) Procediendo de forma análoga a la del apartado anterior:

$$I_y = \int_M x^2 dM = \int_0^\pi \sigma \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^2 r dr = \int_0^\pi \sigma \frac{R^4}{4} \cos^2 \varphi d\varphi = \sigma \frac{R^4}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi$$

$$I_y = \sigma \frac{R^4}{4} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^\pi = \sigma \frac{\pi R^4}{8} = \frac{2M}{\pi R^2} \frac{\pi R^4}{8}$$

$$\overline{I_y = \frac{1}{4} M R^2}$$

d) El momento de inercia polar será:

$$\overline{I_o = I_x + I_y = \frac{1}{2} M R^2}$$

2.4. Se considera un aro uniforme de masa M y radio R . Calcular:

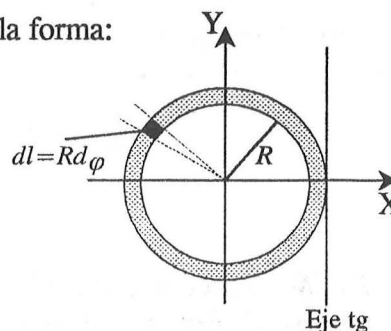
- El momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano del aro que pase por su centro de gravedad.
- El momento de inercia respecto de un eje que esté en el plano del aro y que pase por su centro de gravedad.
- El momento de inercia respecto de un eje tangente al aro (en el plano del mismo).

a) Se considera un elemento diferencial de masa definido de la forma:

$$dM = \lambda \cdot dl = \lambda \cdot R d\varphi$$

$$M = \int_0^{2\pi} \lambda \cdot R d\varphi = \lambda 2\pi R$$

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$



El momento de inercia respecto al eje perpendicular al plano que pasa por el centro del aro es el mismo que el momento de inercia polar, porque la mínima distancia del aro a dicho eje es la distancia al centro:

$$I_0 = \int_M R^2 dM = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda \cdot R d\varphi = \lambda R^3 \cdot 2\pi \Rightarrow \underline{I_0 = M R^2}$$

b) El momento de inercia respecto del eje que está en el plano del aro y que pasa por el centro de gravedad se calcula sabiendo que por simetría:

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 \Rightarrow \underline{I_x = I_y = \frac{1}{2} M R^2}$$

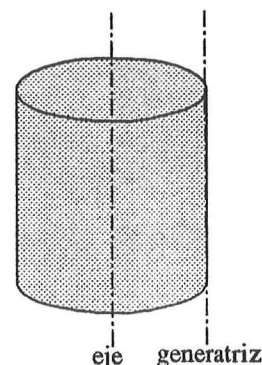
c) Como el eje tangente al aro (en su plano) es paralelo al que pasa por el centro de gravedad calculado anteriormente, se aplica el teorema de Steiner:

$$I_{\text{eje tg}} = I_y + M d^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 \Rightarrow \underline{I_{\text{eje tg}} = \frac{3}{2} M R^2}$$

2.5. Se considera un cilindro homogéneo de masa M , radio R y altura H . Calcular:

- El momento de inercia respecto a su eje.
- El momento de inercia respecto a la generatriz.

a) Como el cilindro es homogéneo: $M = \rho V = \rho \pi R^2 H$



Se considera un elemento diferencial de masa que sea una corteza cilíndrica de altura H , radio r y espesor dr , con centro en el eje del cilindro dado:

$$dM = \rho dV = \rho 2\pi r H dr$$

$$I_{eje} = \int_M r^2 dM = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r H dr = 2\pi \rho H \frac{R^4}{4} \Rightarrow \underline{I_{eje} = \frac{1}{2} M R^2}$$

b) Como la generatriz es paralela al eje se puede aplicar el teorema de Steiner:

$$I_{generatriz} = I_{eje} + M d^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 \Rightarrow \underline{I_{generatriz} = \frac{3}{2} M R^2}$$

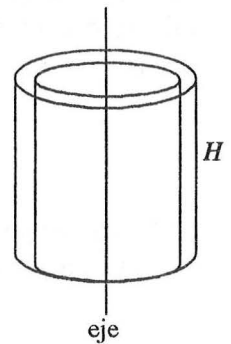
2.6. Se considera una corona cilíndrica homogénea de masa M , radios R_1 y R_2 ($R_2 = 2R_1$) y altura H . Calcular el momento de inercia respecto a su eje.

Como es homogénea: $M = \rho V = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) H = \rho \pi 3R_1^2 H$

Para calcular el momento de inercia se considera el mismo dM que en el ejercicio anterior: $dM = \rho dV = \rho 2\pi r H dr$

$$I_{eje} = \int_M r^2 dM = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho 2\pi r H dr = 2\pi \rho H \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \pi \rho H \frac{15R_1^4}{2}$$

$$\underline{I_{eje} = \frac{5}{2} M R_1^2}$$



2.7. Se considera un octante de esfera maciza homogénea de masa M y radio R . Calcular su momento de inercia respecto a uno de los ejes cartesianos.

El volumen de una esfera es: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$

El momento de inercia de una esfera de radio R y masa M respecto a su centro, en coordenadas esféricas, es:

$$I_0 = \int_0^R r^2 dM = \int_0^R r^2 \rho dV = \rho \int_0^R r^2 \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$I_0 = 4\pi \rho \frac{R^5}{5} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{3}{5} R^2 = \frac{3}{5} M R^2$$

Y, en general, el momento de inercia respecto al origen de coordenadas de una esfera es, en coordenadas cartesianas:

$$I_0 = \int_M r^2 dM = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dM = \int_M \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dM$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_M (y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2) dM$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \left[\int_M (y^2 + z^2) dm + \int_M (x^2 + z^2) dm + \int_M (x^2 + y^2) dm \right] = \frac{1}{2} [I_x + I_y + I_z]$$

Por simetría $I_x = I_y = I_z$. Por tanto:

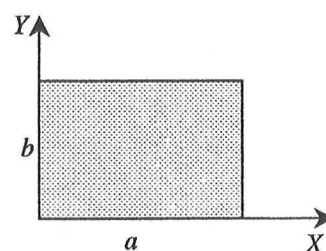
$$I_0 = \frac{3}{2} I_{\text{eje}_0} \Rightarrow I_{\text{eje}_0} = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{5} M R^2$$

Para un octante de esfera, (por simetría):

$$I_{\text{eje octante}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} M R^2 = \underline{\underline{\frac{1}{20} M R^2}}$$

2.8. Se considera la placa rectangular de la figura de masa total M uniformemente distribuida. Calcular:

- El momento de inercia respecto al eje X .
- El momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior que pase por el centro de gravedad.
- El momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano de la placa que pase por el centro de gravedad.

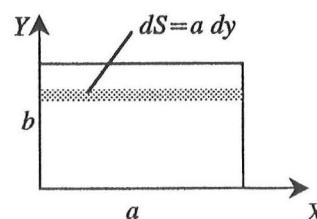


a) Como la masa está uniformemente distribuida:

$$M = \sigma \cdot S = \sigma \cdot ab \Rightarrow dM = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot a dy \quad (\text{Ver Figura adjunta})$$

Por tanto el momento de inercia respecto al eje X será:

$$I_x = \int_M y^2 dM = \int_0^b y^2 \sigma a dy = a \sigma \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{\sigma}{3} ab^3 = \frac{1}{3} M b^2$$



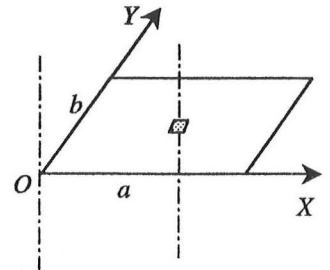
c) Para determinar el momento de inercia respecto del plano paralelo al anterior que pase

por el centro de gravedad se aplica el teorema de Steiner:

$$I_x = I_{cg} + Md^2 \Rightarrow I_{cg} = \frac{1}{3}Mb^2 - M\frac{b^2}{4} = \frac{1}{12}Mb^2$$

c) Primero calculamos el momento de inercia respecto al origen (que coincide con el momento de inercia de la placa respecto a un eje perpendicular al plano de la misma que pasa por dicho origen):

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{3}Mb^2 + \frac{1}{3}Ma^2 = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$



Una vez conocido I_0 , basta aplicar el teorema de Steiner para determinar el momento de inercia de la placa respecto a un eje paralelo a éste que pasa por el centro de gravedad:

$$I_0 = I_{cg} + Md^2 \Rightarrow I_{cg} = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2) - M\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

3. CUERPOS CON MASA NO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

3.1. Se considera una varilla de longitud L y masa M cuya densidad lineal es directamente proporcional al cuadrado de la distancia a un extremo considerado origen. Calcular:

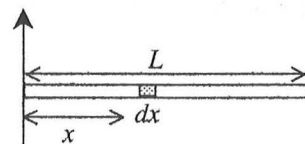
a) El centro de gravedad de la varilla.

b) El momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por el origen de la misma.

c) El momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por el centro de ésta.

a) La densidad lineal de masa varía según:

$$\lambda = k \cdot x^2$$



$$M = \int_0^L \lambda \, dx = \int_0^L k x^2 \, dx = k \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = k \frac{L^3}{3} \Rightarrow k = \frac{3M}{L^3} \Rightarrow \lambda = \frac{3M}{L^3} x^2$$

El centro de gravedad de la varilla será:

$$x_{cg} = \frac{\int_0^L x \, dm}{M} = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{3M}{L^3} x^2 \cdot dx}{M} = \frac{3}{L^3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^L \Rightarrow \underline{x_{cg} = \frac{3}{4} L}$$

b) El momento de inercia respecto al eje vertical que pasa por un extremo es:

$$I_{eje} = \int_0^L x^2 \, dm = \int_0^L x^2 \cdot \frac{3M}{L^3} x^2 \, dx = \frac{3M}{L^3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^L$$

$$\underline{I_{eje} = \frac{3}{5} M L^2}$$

d) Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_{eje} = I_{cg} + M \cdot d^2$$

$$I_{cg} = I_{eje} - M d^2 = \frac{3}{5} M L^2 - M \frac{9}{16} L^2 = \left(\frac{48}{80} - \frac{45}{80} \right) M L^2$$

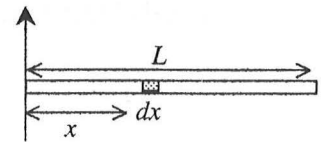
$$\underline{I_{cg} = \frac{3}{80} M L^2}$$

3.2. Se considera una varilla delgada, de longitud L y masa M , que tiene una densidad lineal variable $\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$, siendo x la distancia de un punto cualquiera de la varilla al extremo cuya densidad, λ_0 , es menor. Calcular:

a) El centro de gravedad.
 b) El momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a la misma, que pasa por el extremo de densidad λ_0 .
 c) El momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular que pase por su centro de gravedad.

a) La masa total de la varilla es:

$$dM = \lambda \, dl = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx$$



$$M = \int_M dM = \int_0^L \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx = \lambda_0 \left(L + \frac{1}{L} \frac{L^2}{2}\right) = \frac{3}{2} \lambda_0 L$$

El centro de gravedad estará en:

$$x_{cg} \cdot M = \int_M x \cdot dM = \int_0^L x \cdot \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx = \lambda_0 \left(\frac{L^2}{2} + \frac{1}{L} \frac{L^3}{3}\right) = \frac{5}{6} \lambda_0 L^2$$

$$x_{cg} = \frac{\frac{5}{6} \lambda_0 L^2}{M} = \frac{\frac{5}{6} \lambda_0 L^2}{\frac{3}{2} \lambda_0 L} \Rightarrow \underline{x_{cg} = \frac{5}{9} L}$$

b) El momento de inercia respecto al extremo será:

$$I = \int_M x^2 \cdot dM = \int_0^L x^2 \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx = \lambda_0 \frac{L^3}{3} + \frac{1}{3} \lambda_0 \frac{L^4}{4} = \frac{7}{12} \lambda_0 L^3$$

Expresándolo en función de M :

$$\lambda_0 = \frac{3M}{2L} \Rightarrow \underline{I = \frac{7}{18} M L^2}$$

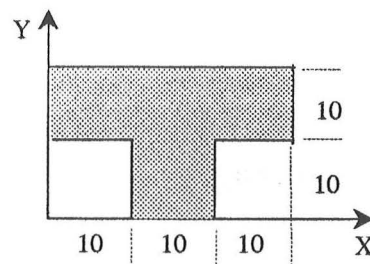
c) Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_d = I_0 + M d^2$$

$$I_0 = I_d - M d^2 = \frac{7}{18} M L^2 - M \left(\frac{5}{9} L\right)^2 = \left(\frac{7}{18} - \frac{25}{81}\right) M L^2 \Rightarrow \underline{I_0 = \frac{13}{162} M L^2}$$

3.3. Se considera la superficie, que se esquematiza en el dibujo adjunto, de masa total M distribuida de modo proporcional a la distancia al eje Y . Se pide:

- Centro de gravedad.
- Momento de inercia respecto al eje Y .
- Momento de inercia respecto al eje X .



a) Se calcula inicialmente la variación de la densidad superficial de masa con la distancia. Para ello se divide la superficie en dos partes 1 y 2 como se muestra en la figura adjunta:

$$\sigma = k x$$

$$dM = \sigma dA$$

$$dM_1 = k x_1 \cdot 10 dx_1$$

$$M_1 = \int_0^{30} 10 k x_1 \cdot dx_1 = 5k \cdot 30^2 = 4500 k$$

$$dM_2 = k x_2 \cdot 10 dx_2 \Rightarrow M_2 = \int_{10}^{20} 10 k x_2 dx_2 = 5k (20^2 - 10^2) = 1500 k$$

La masa total será:

$$M = \int dM_1 + \int dM_2 = \int_0^{30} 10 k x_1 dx_1 + \int_{10}^{20} 10 k x_2 dx_2 = 10 k \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^{30} + 10 k \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_{10}^{20}$$

$$M = 10 k \left[\frac{900}{2} + \frac{400}{2} - \frac{100}{2} \right] = 6000 k \Rightarrow k = \frac{M}{6000}$$

Por tanto, la densidad será: $\sigma = \frac{M}{6000} x$

Para calcular el centro de gravedad de la superficie se calcula primero los centros de gravedad de cada una de las partes en que se ha dividido ésta:

$$x_{cg1} \cdot M_1 = \int x_1 \cdot dM = \int_0^{30} x_1 k x_1 10 dx_1 = 10 k \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^{30} = \frac{10}{3} k \cdot 30^3$$

$$x_{cg1} = \frac{\frac{10}{3} k 30^3}{5 k 30^2} = \frac{2}{3} 30 = 20$$

$$x_{cg2} \cdot M_2 = \int_{10}^{20} x_2 k x_2 10 dx_2 = \frac{10 k}{3} (20^3 - 10^3)$$

$$x_{cg2} = \frac{\frac{10}{3} k (20^3 - 10^3)}{5 k (20^2 - 10^2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7000}{300} = 15,5$$

Por tanto:

$$x_{cg} = \frac{x_{cg1} M_1 + x_{cg2} M_2}{M_1 + M_2} = \frac{20 \cdot 4500 k + 15,5 \cdot 1500 k}{(4500 + 1500) k}$$

$$\underline{x_{cg} \approx 18,8}$$

Para la componente y hay simetría, por lo que $y_{cg1} = 15$ e $y_{cg2} = 5$.

$$y_{cg} = \frac{y_{cg1} M_1 + y_{cg2} M_2}{M_1 + M_2} = \frac{15 \cdot 4500 k + 5 \cdot 1500 k}{6000 k}$$

$$\underline{y_{cg} = 12,5}$$

b) Se calcula el momento de inercia respecto del eje Y de cada una de las dos partes consideradas (en expresiones teórico-formales que deberían completarse con las correspondientes unidades según $[I] = ML^2$):

$$I_1 = \int_{M_1} x_1^2 dM_1 = \int_0^{30} x_1^2 \cdot k \cdot x_1 \cdot 10 dx_1 = 10 k \left[\frac{x_1^4}{4} \right]_0^{30} = \frac{5}{2} k \cdot 30^4 = \frac{5}{2} 30^4 \frac{M}{6000} = 337,5 M$$

$$I_2 = \int_{M_2} x_2^2 dM_2 = \int_{10}^{20} x_2^2 k \cdot x_2 \cdot 10 dx_2 = 10 k \left[\frac{x_2^4}{4} \right]_{10}^{20} = \frac{5}{2} \cdot k [20^4 - 10^4] = 62,5 M$$

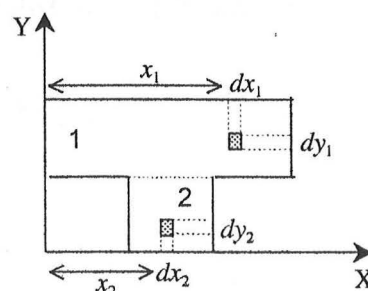
$$\underline{I_y = I_1 + I_2 = 400 M}$$

c) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje X se consideran los elementos diferenciales de masa que se observan en la figura, definidos de la forma:

$$dM_1 = k x_1 \cdot dx_1 \cdot dy_1$$

$$dM_2 = k x_2 \cdot dx_2 \cdot dy_2$$

$$I_1 = \int_{M_1} y_1^2 dM_1 = \int_{10}^{20} \int_0^{30} y_1^2 \cdot k x_1 \cdot dx_1 \cdot dy_1 = \int_{10}^{20} y_1^2 \cdot k \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^{30} dy_1$$



$$I_1 = \int_{10}^{20} \frac{30^2}{2} k y_1^2 \cdot dy_1 = \frac{30^2}{2} \cdot k \frac{1}{3} [20^3 - 10^3] = 1,05 \cdot 10^6 \frac{M}{6000} = 175 M$$

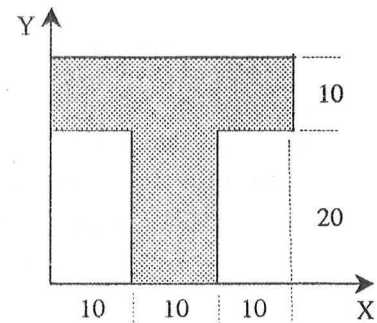
$$I_2 = \int_{M_2} y_2^2 dM_2 = \int_0^{10} \int_{10}^{20} y_2^2 \cdot k x_2 \cdot dx_2 dy_2 = \int_0^{10} y_2^2 \cdot k \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_{10}^{20} dy_2$$

$$I_2 = \frac{k}{2} (20^2 - 10^2) \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{k}{6} (20^2 - 10^2) 10^3 = 50 \cdot 10^3 \frac{M}{6000} = 8,3 M$$

$$\underline{I_x = I_1 + I_2 = 183,3 M}$$

3.4. Se considera la figura plana que se esquematiza en la figura, de masa M distribuida de forma tal que la densidad varía proporcionalmente con el cuadrado de la distancia al eje X . Calcular:

- El centro de gravedad.
- El momento de inercia respecto al eje X .
- El momento de inercia respecto al eje Y .

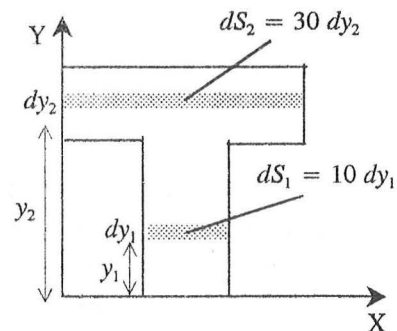


a) Para calcular la masa total de la placa se divide ésta en dos partes de masas m_1 y m_2 , cuyos valores son:

$$dm = \sigma dS = k y^2 dS$$

$$m_1 = \int_{S_1} \sigma \cdot dS_1 = \int_0^{20} \sigma \cdot (10 dy_1) = 10 k \int_0^{20} y_1^2 dy_1$$

$$m_1 = 10 k \left[\frac{y_1^3}{3} \right]_0^{20} = 10 \cdot \frac{20^3}{3} k$$



$$m_2 = \int_{S_2} \sigma dS_2 = \int_{20}^{30} \sigma (30 dy_2) = 30 k \int_{20}^{30} y_2^2 dy_2 = 30 k \left[\frac{y_2^3}{3} \right]_{20}^{30} = 30 \left[\frac{30^3 - 20^3}{3} \right] k$$

La masa total de la placa es:

$$M = m_1 + m_2 = 10 k \left(30^3 - 20^3 + \frac{20^3}{3} \right) = 10 k (27000 - 5333) = 21666 k$$

y la constante de proporcionalidad:

$$k = \frac{M}{216\,666}$$

La componente $x_{cg} = 15$ por simetría de figura y de distribución de masa respecto de la recta $x = 15$.

$$y_{cg} = \frac{\int_0^{20} y_1 \cdot dm_1 + \int_{20}^{30} y_2 \cdot dm_2}{M} = \frac{\int_0^{20} y_1 \cdot k y_1^2 \cdot 10 dy_1 + \int_{20}^{30} y_2 \cdot k y_2^2 \cdot 30 dy_2}{M}$$

$$y_{cg} = \frac{10k \left[\frac{y_1^4}{4} \right]_0^{20} + 30k \left[\frac{y_2^4}{4} \right]_{20}^{30}}{M} = \frac{k}{4M} (10 \cdot 20^4 + 30 \cdot 30^4 - 30 \cdot 20^4) = \frac{k}{4M} 2,11 \cdot 10^7$$

$$\underline{\underline{y_{cg} = 24,34}}$$

b) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje X se consideran los elementos diferenciales de masa del apartado anterior, sabiendo que el momento de inercia de toda la placa es la suma de los momentos de inercia de cada una de las partes en que se ha dividido la misma (se recuerda que $[I] = ML^2$).

$$I_x = \int_0^{20} y_1^2 \cdot dm_1 + \int_{20}^{30} y_2^2 \cdot dm_2 = \int_0^{20} y_1^2 \cdot k y_1^2 \cdot 10 dy_1 + \int_{20}^{30} y_2^2 \cdot k y_2^2 \cdot 30 dy_2$$

$$I_x = 10k \left[\frac{y_1^5}{5} \right]_0^{20} + 30k \left[\frac{y_2^5}{5} \right]_{20}^{30} = 2k \cdot 20^5 + 6k \cdot (30^5 - 20^5) = 1,33 \cdot 10^8 k$$

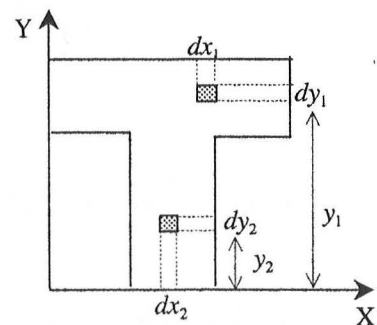
$$\underline{\underline{I_x = 613,85 M}}$$

c) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje Y se consideran los elementos diferenciales de masa que se aprecian en la figura:

$$dm_1 = \sigma \cdot dS_1 = k y_1^2 \cdot dx_1 \cdot dy_1$$

$$dm_2 = \sigma \cdot dS_2 = k y_2^2 \cdot dx_2 \cdot dy_2$$

$$I_y = \int x_1^2 dm_1 + \int x_2^2 dm_2$$



$$I_y = \int_0^{30} \int_{20}^{30} x_1^2 \cdot k y_1^2 \cdot dy_1 \cdot dx_1 + \int_{10}^{20} \int_0^{20} x_2^2 \cdot k y_2^2 \cdot dy_2 \cdot dx_2$$

$$I_y = \int_0^{30} k \cdot x_1^2 \left[\frac{y_1^3}{3} \right]_{20}^{30} dx_1 + \int_{10}^{20} k \cdot x_2^2 \left[\frac{y_2^3}{3} \right]_0^{20} dx_2$$

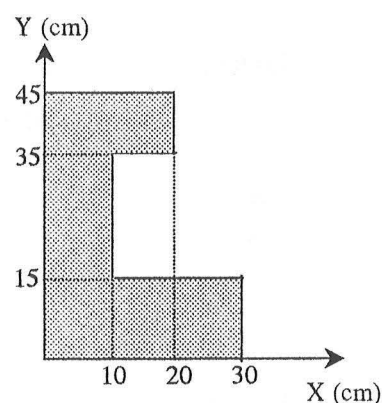
$$I_y = k \left(\frac{30^3 - 20^3}{3} \right) \int_0^{30} x_1^2 dx_1 + k \left(\frac{20^3}{3} \right) \int_{10}^{20} x_2^2 dx_2$$

$$I_y = k \frac{30^3 - 20^3}{3} \cdot \frac{30^3}{3} + k \frac{20^3}{3} \cdot \frac{20^3 - 10^3}{3} = \frac{k}{9} [5,13 \cdot 10^8 + 5,6 \cdot 10^7]$$

$$\underline{\underline{I_y = 291,8 M}}$$

3.5. Se considera la superficie plana de la figura adjunta de masa total M distribuida de modo que la densidad superficial varía linealmente con la distancia al eje Y .

Calcular el centro de gravedad de la figura.



Se divide la superficie en tres partes, sabiendo que la masa total será:

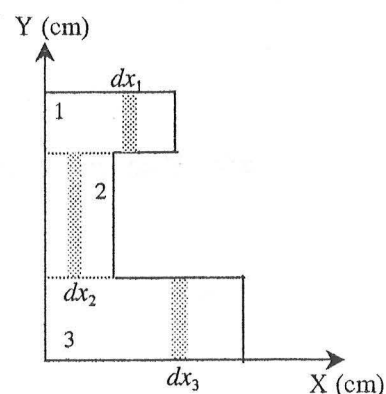
$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

Como

$$\sigma = kx$$

$$dm = \sigma dS = kx dS$$

Se calcula la masa de cada una de ellas:



$$m_1 = \int_0^{20} \sigma dS_1 = \int_0^{20} \sigma (10 dx_1) = 10k \int_0^{20} x_1 dx_1 = 10k \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^{20} = 2000k$$

$$m_2 = \int_0^{10} \sigma dS_2 = \int_0^{10} \sigma (20 dx_2) = 20k \int_0^{10} x_2 dx_2 = 20k \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{10} = 1000k$$

$$m_3 = \int_0^{30} \sigma dS_3 = \int_0^{30} \sigma (15 dx_3) = 15k \int_0^{30} x_3 dx_3 = 15k \left[\frac{x_3^2}{2} \right]_0^{30} = 6750k$$

Por tanto:

$$M = k \left[15 \frac{30^2}{2} + 20 \frac{10^2}{2} + 10 \frac{20^2}{2} \right] = k [6750 + 1000 + 2000] = 9750 k$$

O bien: $k = \frac{M}{9750}$

Como es una figura compuesta, la componente x del centro de gravedad se calcula a partir de la expresión:

$$x_{cg} = \frac{\int_0^{20} dm_1 \cdot x_1 + \int_0^{10} dm_2 \cdot x_2 + \int_0^{30} dm_3 \cdot x_3}{M}$$

Luego:

$$x_{cg} \cdot M = \int_0^{20} x_1 \cdot k x_1 \cdot 10 dx_1 + \int_0^{10} x_2 \cdot k x_2 \cdot 20 dx_2 + \int_0^{30} x_3 \cdot k x_3 \cdot 15 dx_3$$

$$x_{cg} \cdot M = 10 k \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^{20} + 20 k \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^{10} + 15 k \left[\frac{x_3^3}{3} \right]_0^{30} = \frac{k}{3} (10 \cdot 20^3 + 20 \cdot 10^3 + 15 \cdot 30^3)$$

Por tanto:

$$\underline{x_{cg} = 17,26 \text{ cm}}$$

A efectos del eje y , por la distribución simétrica respecto de los ejes medios paralelos a x :

$$y_{cg1} = 40 \quad ; \quad y_{cg2} = 25 \quad ; \quad y_{cg3} = 7,5$$

Por tanto:

$$y_{cg} = \frac{m_1 y_{cg1} + m_2 y_{cg2} + m_3 y_{cg3}}{M} = \frac{m_1 \cdot 40 + m_2 \cdot 25 + m_3 \cdot 7,5}{M}$$

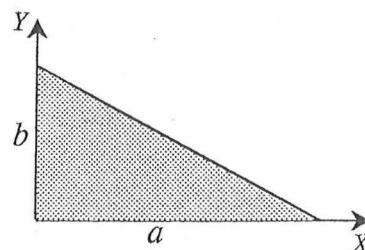
$$y_{cg} = \frac{2000 k \cdot 40 + 1000 k \cdot 25 + 6750 k \cdot 7,5}{M} = (80000 + 25000 + 50625) \frac{k}{M}$$

$$\underline{y_{cg} = 15,96 \text{ cm}}$$

3.6. Se considera la placa triangular de la figura, de masa total M , cuya densidad superficial varía de la forma $\sigma = k y$.

Determinar:

- El centro de gravedad.
- El momento de inercia respecto al eje X .
- El momento de inercia respecto al eje Y .

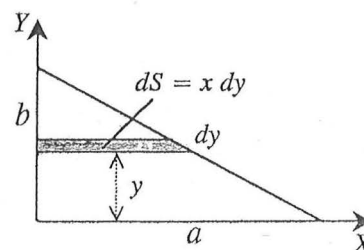


La ecuación de la hipotenusa de este triángulo es:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \quad \text{o bien} \quad x = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Para calcular la masa de la placa se considera el elemento diferencial de masa de la figura adjunta

$$dM = \sigma \cdot dS = k \cdot y \cdot x \cdot dy$$



$$M = \int_0^b k y a \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy = k a \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b} \right]_0^b = k a \left[\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3} \right] = \frac{k a b^2}{6}$$

a) Una vez conocida la distribución de la masa se puede calcular el centro de gravedad de la placa triangular.

$$x_{cg} \cdot M = \int x \cdot dM = \int_0^b \frac{a}{2} \left(1 - \frac{y}{b}\right) k y a \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy = \int_0^b \frac{a^2}{2} k \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 y dy$$

$$x_{cg} \cdot M = \frac{a^2}{2} k \int_0^b \left(1 - \frac{2y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right) y dy = \frac{a^2}{2} k \left(\frac{b^2}{2} - \frac{2b^2}{3} + \frac{b^2}{4} \right) = \frac{aM}{4}$$

$$\underline{x_{cg} = \frac{a}{4}}$$

$$y_{cg} \cdot M = \int_0^b y k y a \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy = k a \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4b} \right) = k a \frac{b^3}{12} = \frac{bM}{2}$$

$$\underline{y_{cg} = \frac{b}{2}}$$

b) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje X se considera el mismo elemento diferencial de masa del apartado anterior.

$$I_x = \int_M y^2 \cdot dM = \int_0^b y^2 k y a \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy = k a \left(\frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{5}\right) = \frac{6M}{ab^2} a \frac{b^4}{20}$$

$$I_x = \frac{3}{10} M b^2$$

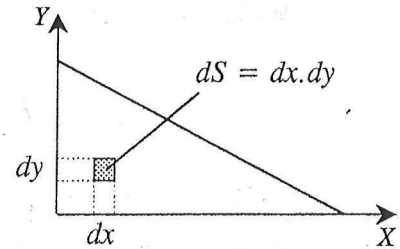
c) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje Y se considera el elemento diferencial de masa que se muestra en la figura adjunta, definido por:

$$dM = \sigma \cdot dS = k \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

$$I_y = \int_M x^2 \cdot dM = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} x^2 \cdot k \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

$$I_y = \int_0^a k \cdot \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{k b^2}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{a} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5a^2} \right]_0^a = \frac{k b^2}{2} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{5} \right)$$

$$I_y = \frac{1}{10} M a^2$$

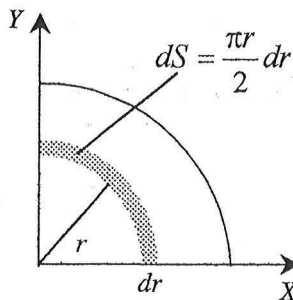


3.7. Se considera un cuadrante de círculo de radio R y masa M, cuya densidad varía proporcionalmente con el cuadrado del radio. Calcular:

a) El centro de gravedad.

b) El momento de inercia respecto de la bisectriz.

a) Para determinar la variación de la densidad con respecto al cuadrado de radio se considera un elemento diferencial de masa como se muestra en la figura adjunta:

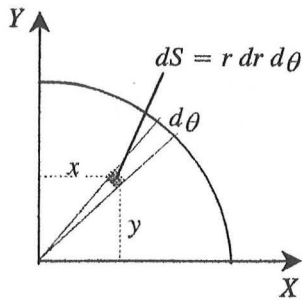


$$\sigma = k r^2 ; \quad dS = \frac{1}{4} (2 \pi r dr) = \frac{\pi r}{2} dr$$

$$M = \int_S \sigma \cdot dS = \int_0^R k r^2 \cdot \frac{\pi r}{2} dr = \frac{\pi k}{2} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi k R^4}{8}$$

$$k = \frac{8M}{\pi R^4} \Rightarrow \sigma = \frac{8M}{\pi R^4} r^2$$

Una vez conocida ésta se puede calcular el centro de gravedad. Para ello se considera el elemento diferencial de masa que se muestra en la figura siguiente:



$$dS = r dr d\theta$$

$$dm = \sigma \cdot dS = k r^2 \cdot r dr d\theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x_{cg} = \frac{\int x dM}{M} = \frac{\int_0^R \int_0^{\pi/2} r \cos \theta \cdot k r^2 \cdot r d\theta dr}{M}$$

$$x_{cg} \cdot M = \frac{8M}{\pi R^4} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \frac{8M}{\pi R^4} \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{8MR}{5\pi} [\sin \theta]_0^{\pi/2}$$

$$x_{cg} = \frac{8R}{5\pi}$$

Por simetría respecto a la bisectriz:

$$y_{cg} = \frac{8R}{5\pi}$$

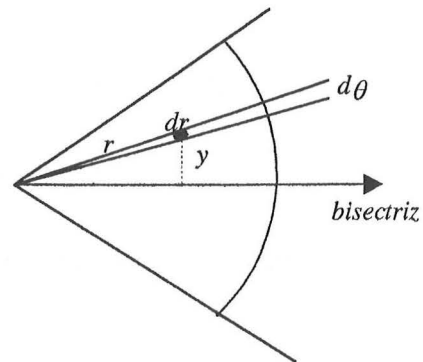
$$r_{cg} = \sqrt{x_{cg}^2 + y_{cg}^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{64R^2}{25\pi^2}} = \sqrt{\frac{128R^2}{25\pi^2}} = 0,72 R$$

b) Para calcular el momento de inercia respecto de la bisectriz se gira el cuadrante de tal manera que la bisectriz coincida con el eje X, tal y como se aprecia en la figura siguiente:

$$y = r \sin \theta$$

$$I_{bisec} = \int_M y^2 \cdot dM = \int_0^R \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (r \sin \theta)^2 \cdot \frac{8M}{\pi R^4} r^2 r d\theta dr$$

$$I_{bisec} = 2 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta \cdot d\theta \int_0^R \frac{8M}{\pi R^4} r^5 \cdot dr$$



$$I_{bisec} = \frac{16M}{\pi R^4} \cdot \frac{R^6}{6} \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta = \frac{8}{3\pi} M R^2 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta = \frac{8}{3\pi} M R^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$I_{bisecc} = \frac{8}{3\pi} M R^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{3\pi} M R^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{4} - \frac{\sin 0}{4} \right) = M R^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3\pi} \right)$$

$$\underline{I_{bisecc} \approx 0,121 M R^2}$$

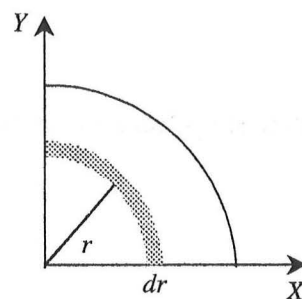
3.8. Sea un cuadrante de círculo de masa M y radio R cuya densidad varía inversamente proporcional al radio. Determinar:

- Centro de gravedad.
- Momento de inercia respecto al eje X .
- Momento de inercia respecto al eje Y .

$$\sigma = \frac{k}{r} ; S = \frac{\pi r^2}{4} \Rightarrow dS = \frac{\pi r dr}{2}$$

$$dM = \sigma \cdot dS = \frac{k}{r} \cdot \frac{\pi}{2} r dr = \frac{k\pi}{2} dr$$

$$M = \int_0^R \frac{k\pi}{2} dr = \frac{k\pi}{2} R \Rightarrow k = \frac{2M}{\pi R}$$

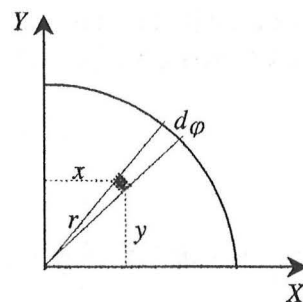


Para calcular el centro de gravedad se considera el elemento diferencial de masa de la figura siguiente definido de la forma:

$$dS = r dr d\varphi$$

$$dM = \sigma \cdot dS = \frac{k}{r} \cdot r dr \cdot d\varphi = k \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$x = r \cos \varphi$$



La componente x del centro de gravedad se obtiene a partir de la expresión:

$$x_{cg} \cdot M = \int_M x \cdot dM = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos \varphi k dr d\varphi$$

$$x_{cg} \cdot M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \frac{R^2}{2} \cos \varphi d\varphi = \frac{k R^2}{2} [\sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k R^2}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{k R^2}{2}$$

$$x_{cg} = \frac{\frac{kR^2}{2}}{\frac{k\pi R}{2}} \Rightarrow \overline{x_{cg} = \frac{R}{\pi}}$$

Por simetría respecto de la bisectriz:

$$\overline{y_{cg} = \frac{R}{\pi}}$$

b) Momento de inercia respecto al eje X:

$$I_x = \int_M y^2 \cdot dM = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \operatorname{sen} \varphi)^2 k dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \frac{R^3}{3}$$

$$I_x = k \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = k \frac{R^3}{3} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_x = k \frac{R^3}{3} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{sen} \pi}{4} - \frac{\operatorname{sen} 0}{4} \right] = \frac{k R^3}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{2M}{\pi R} \cdot \frac{R^3}{3} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\overline{I_x = \frac{1}{6} M R^2}$$

c) Por simetría, el momento de inercia respecto al eje Y será también:

$$\overline{I_y = \frac{1}{6} M R^2}$$

3.9. Sea un cuadrante de un círculo de radio R y masa M tal que la densidad de un punto (x, y) viene dada por la expresión $\sigma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x$.

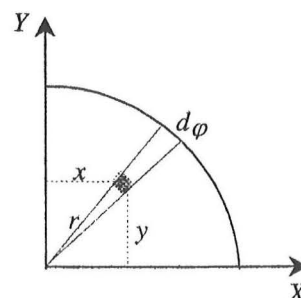
Calcular su centro de gravedad.

Se considera el elemento diferencial de masa que se muestra en la figura siguiente:

$$\sigma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \Rightarrow \operatorname{tg} \sigma = \frac{y}{x}$$

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$



Por tanto:

$$\sigma = \varphi$$

$$dS = r \, dr \, d\varphi \Rightarrow dM = \sigma \cdot dS = \varphi \cdot r \, dr \cdot d\varphi$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \varphi \, r \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2}{2} \varphi \, d\varphi = \frac{R^2}{2} \frac{(\pi/2)^2}{2} = \frac{R^2 \pi^2}{16}$$

Para el cálculo de la componente x del centro de gravedad se utiliza la expresión:

$$x_{cg} \cdot M = \int_M x \, dM = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R x \varphi \, r \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos \varphi \, r \, dr \, d\varphi$$

$$x_{cg} \cdot M = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{R^3}{3} [\varphi \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \left[\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 \right] = \frac{R^3}{6} (\pi - 2)$$

Por consiguiente:

$$x_{cg} = \frac{\frac{R^3}{6} (\pi - 2)}{\frac{R^2 \pi^2}{16}} \Rightarrow x_{cg} = \frac{8R}{3\pi^2} (\pi - 2)$$

Análogamente, la componente y del centro de gravedad se obtiene a partir de la expresión:

$$y_{cg} \cdot M = \int_M y \, dM = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \operatorname{sen} \varphi \cdot r \, dr \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$$

$$y_{cg} \cdot M = \frac{R^3}{3} [\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \left[1 - 0 - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{R^3}{6} (2 - \pi)$$

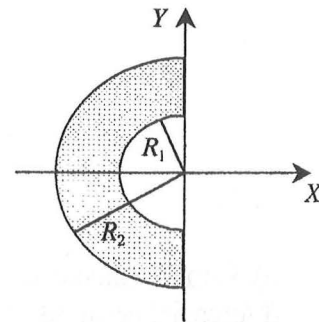
Luego:

$$y_{cg} = \frac{\frac{R^3}{6} (2 - \pi)}{\frac{R^2 \pi^2}{16}} \Rightarrow y_{cg} = \frac{8R}{3\pi^2} (2 - \pi)$$

3.10. Se considera la sección de la figura "media corona circular" de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), de masa total M distribuida de modo que la densidad varía proporcionalmente al radio.

Determinar:

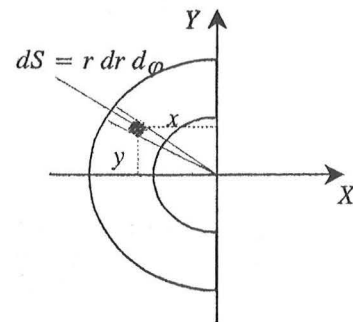
- El centro de gravedad.
- El momento de inercia respecto al eje Y .



a) Como hay simetría respecto al eje X , el centro de gravedad estará situado en dicho eje, por lo que sólo hay que calcular la coordenada x_{cg} .

$$\overline{y_{cg}} = 0$$

Se considera el elemento diferencial de masa que se muestra en la figura adjunta, definido de la forma:



$$\sigma = k r ; \quad dS = r dr d\varphi$$

$$dM = \sigma \cdot dS = k \cdot r \cdot r dr \cdot d\varphi = K \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$M = \int_S \sigma \cdot dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} k r^2 \cdot dr \cdot d\varphi = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_1}^{R_2} d\varphi = \frac{k\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3)$$

La componente x del centro de gravedad se obtiene a partir de la expresión:

$$x_{cg} \cdot M = \int_M x \cdot dM = \int_S r \cos \varphi \cdot k r \cdot dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cos \varphi \cdot k r dr \cdot d\varphi$$

Teniendo en cuenta que la figura está situada en la parte negativa del eje de las X :

$$x_{cg} \cdot M = -2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = -2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = -2k \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi$$

$$x_{cg} \cdot M = -\frac{k}{2} (R_2^4 - R_1^4) [\sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{k}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

Por tanto:

$$x_{cg} = -\frac{\frac{k}{2}(R_2^4 - R_1^4)}{M} = -\frac{\frac{k}{2}(R_2^4 - R_1^4)}{k \frac{\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)} \Rightarrow \overline{x_{cg} = -\frac{3}{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}}$$

b) Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje Y consideramos el mismo elemento diferencial de masa del apartado anterior.

$$I_y = \int_M x^2 \cdot dM = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot k \cdot r^2 dr \cdot d\varphi = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{5} \right]_{R_1}^{R_2} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$I_y = \frac{k}{5} (R_2^5 - R_1^5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi$$

$$I_y = \frac{3M}{5\pi} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3M}{10\pi} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \sin(-\pi) \right)$$

$$\overline{I_y = \frac{3M}{10} \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}}$$

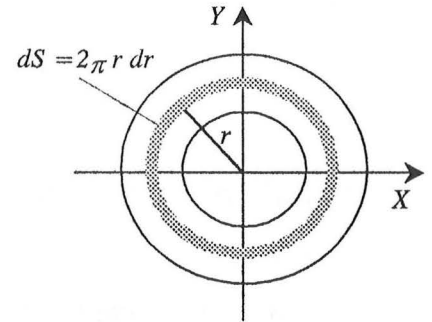
Este segundo apartado se puede resolver por otro procedimiento. Se calcula inicialmente el momento de inercia polar de una corona completa, considerando el elemento diferencial de masa de la figura:

$$dM = \sigma \cdot dS = k r \cdot dS$$

$$I_0 = \int_M r^2 \cdot dM = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot \frac{3M}{\pi(R_2^3 - R_1^3)} r \cdot 2\pi r dr$$

$$I_0 = \frac{6M}{(R_2^3 - R_1^3)} \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr = \frac{6M}{5} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$$

$$I_0 = I_x + I_y = 2I_y \Rightarrow I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{3M}{5} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$$

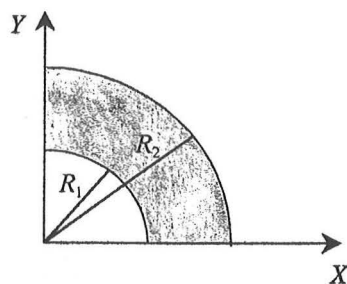


Para media corona:

$$\overline{I_y = \frac{I'_y}{2} = \frac{3M}{10} \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}}$$

3.11. Se considera la sección de la figura "cuarto de corona circular" de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y de masa total M distribuida de modo que la densidad varía inversamente proporcional al radio. Determinar:

1. El centro de gravedad.
2. El momento de inercia respecto al eje OX .

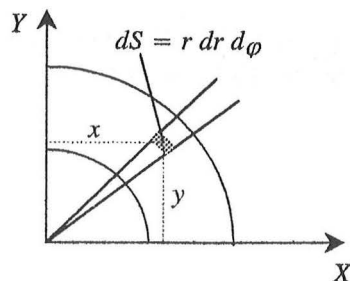


Se considera el elemento diferencial de masa que se aprecia en la figura adjunta y que se define de la forma siguiente:

$$dS = r \, dr \, d\varphi \quad ; \quad \sigma = \frac{k}{r}$$

$$dM = \sigma \, dS = \frac{k}{r} r \, dr \, d\varphi = k \, dr \, d\varphi$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} k \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k (R_2 - R_1) \, d\varphi = k (R_2 - R_1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{k \pi}{2} (R_2 - R_1)$$



$$k = \frac{2M}{\pi(R_2 - R_1)} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{r} \frac{2M}{\pi(R_2 - R_1)}$$

La componente x del centro de gravedad se obtiene a partir de la expresión:

$$x_{cg} \cdot M = \int_M x \cdot dM = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} r \cos \varphi \cdot k \, dr \cdot d\varphi$$

$$x_{cg} \cdot M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{k}{2} (R_2^2 - R_1^2) \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right)$$

$$x_{cg} = \frac{\frac{M(R_2^2 - R_1^2)}{\pi(R_2 - R_1)}}{M} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2 - R_1} \Rightarrow \underline{x_{cg} = \frac{R_2 + R_1}{\pi}}$$

La componente y del centro de gravedad se obtiene a partir de la expresión:

$$y_{cg} \cdot M = \int_M y \cdot dM = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} r \sin \varphi \cdot k \, dr \, d\varphi$$

$$y_{cg} \cdot M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \sin \varphi \, d\varphi = k \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \left[\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right]$$

$$y_{cg} = \frac{\frac{k}{2} (R_2^2 - R_1^2)}{\frac{k}{2} \pi (R_2 - R_1)} = \frac{1}{\pi} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2 - R_1} \Rightarrow \underline{y_{cg} = \frac{R_2 + R_1}{\pi}}$$

b) Para el cálculo del momento de inercia se considera el mismo elemento diferencial de masa del apartado anterior:

$$I_x = \int_M y^2 \cdot dM = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot k \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{2M}{3\pi} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$I_x = \frac{2M}{3\pi} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{2M}{3\pi} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

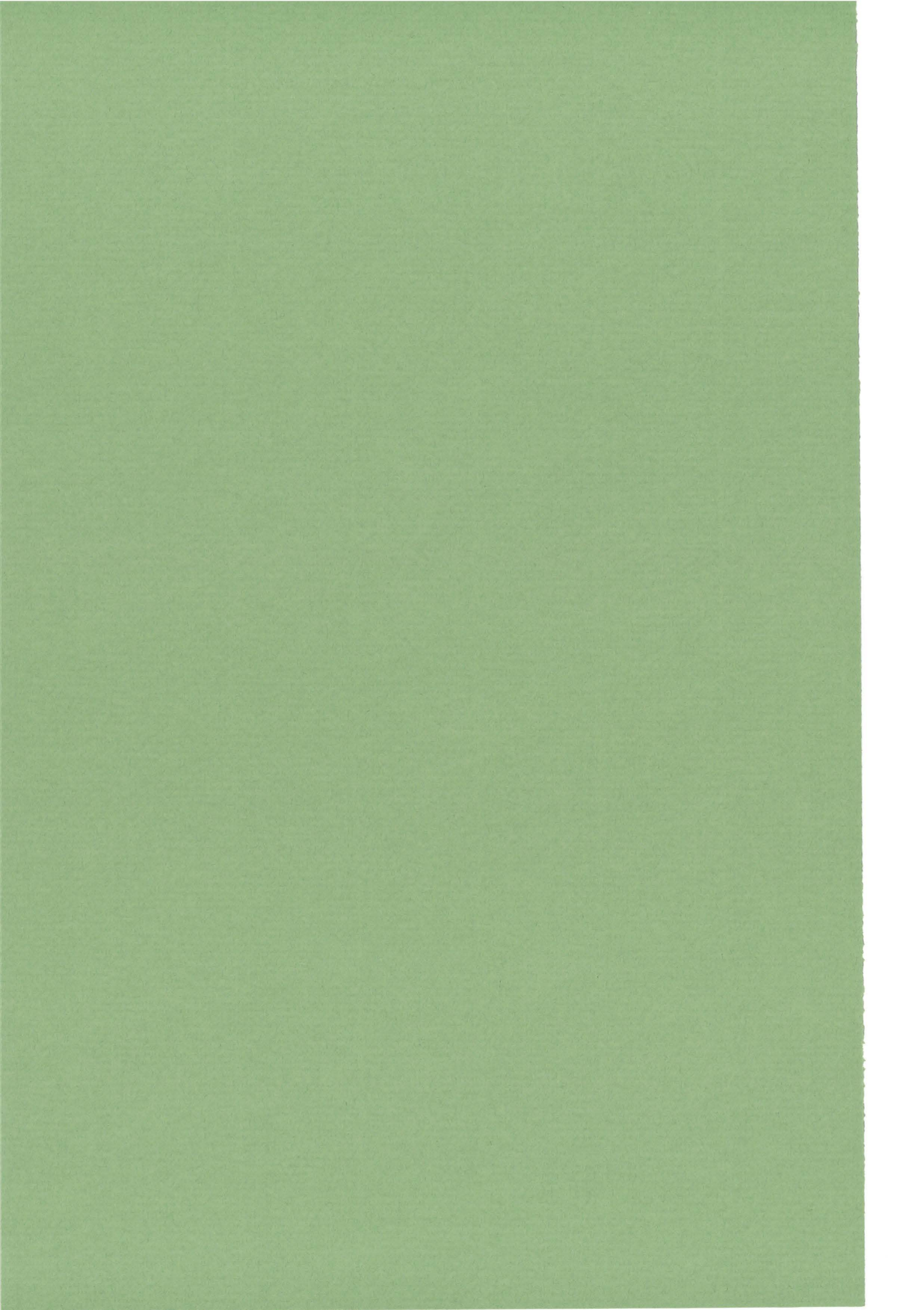
$$I_x = \frac{2M}{3\pi} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \pi + \frac{1}{4} \sin 0 \right) = \frac{2M}{3\pi} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{M}{6} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1}$$

Por tanto:

$$\underline{I_x = \frac{M}{6} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1}}$$

NOTAS

NOTAS



CUADERNO

74.03

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

<http://www.aq.upm.es/of/jherrera>
info@mairea-libros.com

